

# CONTROL PID LPV GAIN SCHEDULED ROBUSTO <sup>1</sup>

F.D. Bianchi <sup>2</sup> R.J. Mantz <sup>3</sup>

*LEICI, Fac. de Ingeniería, Univ. Nacional de La Plata,  
CC 91, 1900 La Plata, Argentina  
fbianchi@ing.unlp.edu.ar*

Resumen: Se presenta un método de diseño de controladores PID para plantas no lineales o variantes en el tiempo basado en el concepto de sistemas lineales de parámetros variantes (LPV). El procedimiento propuesto permite diseñar tanto controladores LTI como gain-scheduled considerando la incertidumbre del modelo. Las ganancias del PID son determinadas resolviendo un problema de optimización convexa con inecuaciones lineales matriciales (LMIs), para lo cual existen algoritmos eficientes y simples de utilizar.

Keywords: PID, control robusto, LPV gain-scheduling

## 1. INTRODUCCIÓN

La utilización de controladores PID en plantas y procesos cuya dinámica cambia ante distintas condiciones de operación requiere métodos de sintonía que aseguren que la estabilidad y las especificaciones se mantengan en todo el rango de operación. Un posible enfoque consiste en considerar los cambios de dinámica como incertidumbre del modelo y abordar el diseño del controlador PID con técnicas de control robusto (IMC, loop shaping, etc.) (Astrom and Hagglum, 1995). Dentro de este contexto, Ge *et al.* (2002) ha propuesto un método de diseño basado en el concepto de multi-modelos. Esta formulación permite determinar las ganancias del PID con un procedimiento de optimización convexa con inecuaciones lineales matriciales (LMIs) para lo cual se dispone de algoritmos eficientes y simples de utilizar (Gahinet *et al.*, 1995; El Ghaoui *et al.*, 1995). Una ventaja interesante de la optimización convexa con LMIs

es la posibilidad de considerar diversos objetivos simultáneos que pueden ser expresados como índices LQR, performance  $H_\infty$ , restricciones en la ubicación de los polos, etc. (Scherer, 1997) Si bien el enfoque robusto provee de métodos de diseño que aseguran estabilidad y performance en todo el rango de operación, en algunas situaciones el controlador resultante, un sistema LTI, puede ser muy conservador. Inclusive puede resultar imposible hallar un único controlador estabilizante.

Un enfoque alternativo para obtener controladores menos conservadores consiste en adaptar las ganancias del PID a los cambios que experimenta la dinámica de la planta. Dentro de este grupo se encuentran técnicas adaptativas como los PID gain-scheduled y autoajustables. En ambos casos el controlador no lineal se basa en la conmutación de un controlador LTI a otro en función de los cambios de dinámica de la planta. En gain scheduling se almacena una serie de controladores previamente calculados, mientras que en los PID autoajustados los controladores se calculan online. Aunque estas técnicas son ampliamente utilizadas, es sabido que la conmutación de un controla-

---

<sup>1</sup> Este trabajo fue financiado por ANPCyT, CICpBA, CONICET y UNLP.

<sup>2</sup> UNLP-CONICET

<sup>3</sup> UNLP-CICpBA

ador a otro es compleja y adolece de garantías de estabilidad (Shamma and Athans, 1992).

En el caso de los controles gain-scheduled, los sistemas lineales de parámetros variantes (LPV) propuesto por Shamma and Athans (1991) han dado lugar a métodos de diseño que consideran al controlador como una única entidad (Apkarian and Gahinet, 1995; Apkarian *et al.*, 1995; Becker and Packard, 1994). De esta manera, se evita la conmutación de controladores y los consecuentes problemas de falta de garantías de estabilidad y complejidad de implementación. Estos procedimientos de síntesis se enmarcan dentro del contexto de la optimización convexa con LMIs. Al igual que en los sistemas LTI puede considerarse una amplia variedad de objetivos expresados tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia (Scherer, 1995).

En este trabajo se aborda el diseño de controladores PID para plantas no lineales o variantes en tiempo dentro del contexto de los sistemas LPV y de la optimización convexa con LMIs. El enfoque propuesto permite abordar el diseño tanto de controladores robustos como gain scheduled en función de la disponibilidad de variables con información de los cambios de dinámica de la planta. De esta manera, los resultados de Ge *et al.* (2002) son ampliados para incluir no sólo el diseño de PID robustos sino también de PID gain scheduled robustos.

*Notación:*  $X = X^T > 0$  ( $X = X^T < 0$ ) indica una matriz simétrica definida positiva (negativa),  $X + (\star) = X + X^T$  y  $\text{Tr}(X)$  es la traza de la matriz  $X$ .

## 2. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Los sistemas lineales de parámetros variantes (LPV) son sistemas lineales cuyas matrices del modelo de estados son funciones continuas y conocidas de un vector de parámetros  $\theta(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n_p}$ , siendo  $\Theta$  un subconjunto compacto. Esto es,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta(t))x + B(\theta(t))u, \\ y &= C(\theta(t))x \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  es la acción de control e  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  es la salida de medición. Los sistemas LPV son comunes en problemas de gain scheduling y en síntesis de controladores robustos cuando una familia de sistemas lineales es parametrizado en función de variables endógenas y/o exógenas (Shamma and Athans, 1991; Rugh and Shamma, 2000). Note que a diferencia de los sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV), el vector de parámetros  $\theta(t)$  no es conocido a priori, sólo se dispone del conjunto acotado de posibles valores  $\Theta$ .

Dado el sistema LPV (1) existen dos enfoques para el diseño de controladores. Si ningún elemento del vector de parámetros  $\theta^4$  es medible, la ecuación (1) puede interpretarse como un sistema LTI sujeto a incertidumbre paramétrica variante. En este caso, el controlador debe ser un sistema LTI que asegure estabilidad y performance robusta para cualquier valor posible de  $\theta \in \Theta$ . En cambio, si todos los parámetros de  $\theta$  son medibles entonces esta información puede ser utilizada para implementar un controlador que también dependa de  $\theta$  y se adapte a los cambios de dinámica de la planta para mejorar así la performance del sistema a lazo cerrado. Estos controladores se denominan LPV gain scheduled y los parámetros  $\theta$  variables de scheduling. También es posible que algunos parámetros sean medibles y otros no. Tal es el caso cuando se considera los errores de medición en las variables de scheduling. Este tipo de controlador se denomina LPV gain scheduled robusto.

El objetivo de este trabajo es plantear un método de diseño para controladores PID, como el mostrado en la Fig. 1, aplicados al sistema LPV (1) donde algunos parámetros pueden medirse y otros no. Es decir, se busca un procedimiento para determinar las ganancias de una ley de control del tipo

$$u = -k_p y - k_d \dot{y} + k_i \int (r - y) dt, \quad (2)$$

donde  $r$  es la referencia. Las ganancias se determinan en el contexto del control óptimo con multi-objetivos para que el sistema a lazo cerrado cumpla con un conjunto de especificaciones expresadas tanto en dominio del tiempo como de la frecuencia.

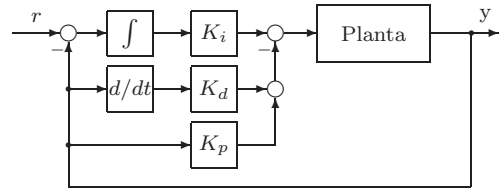


Figura 1. Esquema de control PID

El vector de parámetros puede descomponerse como  $\theta = [\theta_u \ \theta_m]^T$ , donde  $\theta_u$  son los parámetros inciertos y  $\theta_m$  son los parámetros medibles. Luego, el caso abordado por Ge *et al.* (2002), donde no se mide ningún parámetro ( $\theta = \theta_u$ ), corresponde al PID robusto donde las ganancias  $k_p$ ,  $k_d$  y  $k_i$  son constantes. Mientras que en el caso más general del PID LPV gain scheduled robusto abordado aquí, las ganancias  $k_p$ ,  $k_d$  y  $k_i$  serán funciones de  $\theta_m$ .

El trabajo se centra en los sistemas LPV del tipo

<sup>4</sup> Por brevedad, de aquí en más la dependencia temporal de  $\theta$  no es expresada explícitamente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(\theta) & -a_1(\theta) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b(\theta) \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \ 0] x. \end{aligned} \quad (3)$$

Luego, si se combina (3) con el control (2), las ecuaciones dinámicas del sistema a lazo abierto resultan

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= A_e(\theta)x_e + B_r r + B_e(\theta)u, \\ y &= C_e x_e \end{aligned} \quad (4)$$

con  $x_e = [y \ \dot{y} \ \int (y-r)dt]^T$ ,  $C_e = [1 \ 0 \ 0]$ ,

$$\begin{aligned} A_e(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0(\theta) & -a_1(\theta) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_r &= [0 \ 0 \ -1]^T, \quad B_e(\theta) = [0 \ b(\theta) \ 0]^T, \end{aligned}$$

donde el diseño del controlador PID es equivalente a resolver un problema de realimentación de estados

$$u = Kx_e = [-k_p \ -k_d \ -k_i]x_e. \quad (5)$$

Para valores constantes de  $\theta$ , la ecuación (3) corresponde a un sistema de segundo orden cuyos polos y ganancia dependen del parámetro  $\theta$ .

Note que aunque el sistema (4) no es completamente general, es posible hallar numerosas aplicaciones de controladores PID donde la dinámica dominante de la planta puede ser descrita por la ecuación (4) (Astrom and Haggglum, 1995). Las ideas expuestas pueden extenderse a sistemas con dinámicas más complejas. En estos casos, es posible hallar una equivalencia entre el control PID y una realimentación estática de salida (SOF). La técnica de diseño que se presenta en la siguiente sección puede aplicarse a estos casos pero el procedimiento de optimización usado para determinar las ganancias del PID debe ser modificado pues es no convexo. La extensión a sistemas más complejos no es tratada aquí por razones de espacio.

En forma similar, si el sistema (1) tiene la forma

$$\dot{x} = -a_0(\theta)x + b(\theta)u, \quad y = x, \quad (6)$$

un controlador PI también puede interpretarse como una realimentación de estados.

### 3. PID LPV GAIN SCHEDULED ROBUSTO

En esta sección, utilizando la equivalencia entre el control PID (2) y la realimentación de estados (5), se propone un método para determinar las ganancias del controlador PID basado en el control óptimo con multi-objetivos. Con este fin, los resultados presentados en (Scherer, 1997; Scherer, 1995) son adaptados para obtener las ganancias de realimentación de estados dependiente de

los parámetros medibles  $\theta_m$  que asegure robustez ante los cambios de dinámica debidos a los parámetros inciertos  $\theta_u$ .

Considere el siguiente sistema LPV a lazo abierto

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_w(\theta)w + B_u(\theta)u, \\ z &= C_z(\theta)x + D_{zw}(\theta)w + D_{zu}(\theta)u. \end{aligned} \quad (7)$$

El diseño de una realimentación de estados óptima con multi-objetivos consiste en hallar el control

$$u = K(\theta_m(t))x, \quad (8)$$

tal que el sistema a lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl}(\theta)x + B_{cl}(\theta)w, \\ z &= C_{cl}(\theta)x + D_{cl}(\theta)w, \end{aligned} \quad (9)$$

sea estable y cada operador  $T_j$  que mapea la referencia y/o perturbación  $w_j$  en la salida  $z_j$ , cumpla cierto objetivo para todo valor de  $\theta \in \Theta$ .

El control óptimo con multi-objetivos abordado como un problema de optimización con LMIs consiste en expresar los objetivos como un conjunto de LMIs que luego son resueltas simultáneamente para obtener la ley de control. Existen numerosos objetivos que pueden ser expresadas como LMIs, entre ellos performance  $H_\infty$  y  $H_2$ , restricción sobre la ubicación de los polos y restricciones en el dominio temporal (cotas en la amplitud, sobrepaso, tiempo de establecimiento, etc.). Por brevedad, sólo se aborda el diseño contemplando performance  $H_\infty$ ,  $H_2$  y restricción sobre la ubicación de los polos, otros objetivos pueden ser considerados simplemente con LMIs adicionales (ver Scherer (1997) para más detalles).

*Performance  $H_\infty$*  (Apkarian *et al.*, 1995). El sistema (9) es exponencialmente estable y

$$\|T_j\|_\infty := \sup_{w_j \in L_2, \|w_j\|_2=1} \|T_j w_j\|_2 < 1/\gamma \quad (10)$$

si y solo si existe una matriz  $X = X^T > 0$  tal que para todo valor de  $\theta \in \Theta$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\theta)X + (\star) & B_{cl_j}(\theta) & X C_{cl_j}^T(\theta) \\ B_{cl_j}^T(\theta)X & -I & D_{cl_j}^T(\theta) \\ C_{cl_j}(\theta) & D_{cl_j}(\theta) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

*Performance  $H_2$*  (Scherer, 1995). El sistema (9) es exponencialmente estable y

$$\|T_j\|_2 := \sup_{\theta \in \Theta} \text{Tr}(C_{cl_j}(\theta)X C_{cl_j}^T(\theta)) < \nu \quad (12)$$

si y solo si  $D_{cl_j} = 0$  y existen  $X = X^T > 0$  y  $Z = Z^T > 0$  tal que para todo valor de  $\theta \in \Theta$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{cl}(\theta)X + (\star) & B_{cl_j}(\theta) \\ B_{cl_j}(\theta)^T & -I \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} Z & C_{cl_j}X \\ X C_{cl_j}^T & X \end{bmatrix} &> 0 \\ \text{Tr}(Z) &< \nu. \end{aligned} \quad (13)$$

La condición (12) corresponde a la variancia de la salida  $z_j = T_j w_j$  cuando  $w_j$  es ruido blanco. Note que, evaluando (9) en  $\theta$  constante, la condición (12) abarca el clásico problema del regulador lineal cuadrático (LQR), donde se busca el control  $u = Kx$  tal que se minimice un índice de performance

$$J = \int_0^\infty (x_{cl}^T Q x_{cl} + u^T R u) dt,$$

si  $B_{w_j} = I$  y se define la salida  $z_j(t) = C_{z_j} x(t) + D_{z_j u} u(t)$ , donde  $C_{z_j}^T C_{z_j} = Q$  y  $D_{z_j u}^T D_{z_j u} = R$ .

Alternativamente, si se reemplaza  $Z$  por  $\alpha I$ , el objetivo de performance  $H_2$  asegura que la máxima amplitud de  $z_j$  es menor que  $\alpha$  cuando  $w_j$  es de energía acotada, es decir,

$$\|T_j\|_2 := \sup_{w_j \in L_2, \|w_j\|_2=1} \|T_j w_j\|_\infty < \alpha. \quad (14)$$

Esta interpretación puede resultar útil, por ejemplo, para imponer cotas en la acción de control y evitar así la saturación del actuador.

*Pole placement* (Scherer, 1997). La restricción en la ubicación de los polos de lazo cerrado de los sistemas LTI resultantes de evaluar (9) en valores constantes de  $\theta$  permite imponer condiciones sobre la respuesta temporal y limitar la magnitud de las ganancias de realimentación. Estas restricciones pueden ser expresada como LMIs imponiendo regiones determinadas por la intersección de franjas, discos, sectores cónicos, etc. Dichas regiones son definidas como

$$\mathcal{R} = \{s \in \mathbb{C} : \alpha + \beta s + \beta \bar{s} < 0\} \quad (15)$$

donde  $\alpha = \alpha^T = [\alpha_{k,l}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\beta = \beta^T = [\beta_{k,l}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Luego, la matriz  $A_{cl}(\theta)$  tiene todos sus autovalores en la región  $\mathcal{R}$  para todo  $\theta \in \Theta$  si existe una matriz  $X = X^T > 0$  tal que

$$[\alpha_{kl} X + \beta_{kl} A_{cl}(\theta) X + \beta_{lk} X A_{cl}^T(\theta)] < 0, \quad (16)$$

$$1 \leq k, l \leq m$$

Luego, reemplazando las matrices de lazo cerrado  $A_{cl}(\theta) = A(\theta) + B_2(\theta)K(\theta_m)$ ,  $B_{cl_j}(\theta) = B_{w_j}(\theta)$ ,  $C_{cl_j}(\theta) = C_{z_j}(\theta) + D_{z_j u}(\theta)K(\theta_m)$ ,  $D_{cl_j}(\theta) = D_{z_j w_j}(\theta)$ , en (11), (13) y (16) y definiendo la variable auxiliar  $Y(\theta_m) = K(\theta_m)X$ , la realimentación de estados que satisfaga simultáneamente performance  $H_\infty$  del operador  $w_1 \rightarrow z_1$ , performance  $H_2$  del operador  $w_2 \rightarrow z_2$  y la restricción en la ubicación de polos expresada por (16) se obtiene hallando  $X = X^T > 0$ ,  $Z = Z^T > 0$  e  $Y(\theta_m)$  tal que

$$[\alpha_{kl} X + \beta_{kl} U(X, Y, \theta) + \beta_{lk} U(X, Y, \theta)^T] < 0 \quad (17)$$

$$1 \leq k, l \leq m$$

$$\begin{bmatrix} U(X, Y, \theta) + (*) & B_{w_1}(\theta) & V(X, Y, \theta)^T \\ B_{w_1}^T(\theta) & -I & D_{z_1 w_1}^T(\theta) \\ V(X, Y, \theta) & D_{z_1 w_1}(\theta) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} U(X, Y, \theta) + (*) & B_{w_2}(\theta) \\ B_{w_2}^T(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} Z & W(X, Y, \theta) \\ W(X, Y, \theta)^T & X \end{bmatrix} > 0, \text{Tr}(Z) < \nu \quad (20)$$

$$\begin{aligned} U(X, Y, \theta) &= A(\theta)X + B_u(\theta)Y(\theta_m), \\ V(X, Y, \theta_m) &= C_{z_1}(\theta)X + D_{z_1 u}(\theta)Y(\theta_m), \\ W(X, Y, \theta) &= C_{z_2}(\theta)X + D_{z_2 w_2}(\theta)Y(\theta_m) \end{aligned}$$

Adicionalmente, el problema de optimización (17)-(20) puede resolverse minimizando  $\nu$  ó  $\gamma$  o una combinación de ambas ( $a \cdot \nu + b \cdot \gamma$  con  $a$  y  $b$  constantes)

Para cada valor constante de  $\theta$ , (17)-(20) son lineales en las incógnitas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Por tanto, la búsqueda de las ganancias de realimentación de estados es un problema de optimización convexa con LMIs. Sin embargo, (17)-(20) implica resolver un conjunto infinito de LMIs. El problema puede reducirse a un conjunto finito haciendo un grillado de  $\Theta$  como se detalla en (Scherer, 1995).

La cantidad de LMIs a resolver se reduce drásticamente en los casos que el sistema LPV dependa en forma afín del vector de parámetros, es decir,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & B_{w_0} & B_u \\ C_{z_0} & D_{z w_0} & D_{z u} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_p \theta_p \begin{bmatrix} A_p & B_{w_p} & 0 \\ C_{z_p} & D_{z w_p} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

con  $B_u$  y  $D_{zu}$  constantes y si  $\Theta$  es un politopo de  $r$  vértices

$$\Theta = \text{Co}\{[\theta_{1_i}, \dots, \theta_{n_{p_i}}]^T, i = 1, \dots, r\}.$$

En esta situación, sólo es necesario evaluar las (17)-(20) en cada vértice  $i$  de  $\Theta$  (Apkarian *et al.*, 1995). Luego, el vector de ganancias se obtiene de

$$K(\theta_m) = \sum_i \alpha_i K_i,$$

donde los  $K_i$  son iguales para todo vértice donde  $\theta_m$  permanece constante. Los  $\alpha_i$  se calculan a partir del valor de  $\theta_m$  medido en el instante  $t$  y de la ecuación

$$\theta_m = \sum_i \alpha_i \theta_i,$$

con  $\sum_i \alpha_i = 1$  y  $\alpha_i > 0 \forall i = 1, \dots, r$ .

El procedimiento propuesto para el diseño del controlador PID gain scheduled robusto puede resumirse en la siguiente forma:

1. Expresar la planta como un sistema LPV y establecer que variables, de las que determinan las condiciones de operación, pueden utilizarse para ajustar las ganancias del PID y cuales son inciertas.
2. Establecer los objetivos definiendo las salidas  $z_1$ ,  $z_2$  y la región de los polos de lazo cerrado.
3. Obtener los valores óptimos de  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  utilizando cualquiera de las rutinas disponibles para resolver las LMIs (17)-(20) y determinar el vector de ganancias  $K$ , cuyos elementos son los parámetros del controlador PID.

Es interesante notar que, al igual que los controles gain scheduled clásico, la formulación en

el contexto de sistemas LPV presentada requiere el almacenamiento de un conjunto de ganancias  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ . La principal diferencia surge en la interpolación. En LPV gain scheduling la interpolación es continua no existiendo los problemas de conmutación que surgen en los controladores gain scheduled clásicos.

#### 4. EJEMPLO

En esta sección el procedimiento de diseño propuesto es ilustrado con un ejemplo. Con este fin, se considera un tanque de reacción que es agitado continuamente (CSTR) (Ge *et al.*, 2002). El comportamiento dinámico de la planta es representado por las siguientes ecuaciones

$$\dot{C}_A = k_1(C_{Af} - C_A) - k_2C_Ae^{-k_3} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{T} = k_1(T_f - T) + k_4C_Ae^{-k_3} \\ + k_5q_c(1 - e^{-k_6/q_c})(T_{cf} - T) \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $C_A$  es la concentración del producto (salida de medición),  $q_c$  es el caudal del refrigerante (acción de control),  $C_{Af}$  es la concentración del compuesto de alimentación (perturbación),  $T$  es la temperatura de la mezcla,  $T_f$  es la temperatura del compuesto de alimentación,  $T_{cf}$  es la temperatura del refrigerante y los  $k_i$  son constantes.

Linealizando las ecuaciones (21)-(22) respecto del punto de operación establecido por  $C_{A_{op}}$ , se obtiene el siguiente sistema lineal parametrizado en función de la concentración  $C_{A_{op}}$

$$\dot{\hat{C}}_A = a_{11}(C_{A_{op}})\hat{C}_A + a_{12}(C_{A_{op}})\hat{T} + b_1\hat{C}_{Af} \quad (23)$$

$$\dot{\hat{T}} = a_{21}(C_{A_{op}})\hat{C}_A + a_{22}(C_{A_{op}})\hat{T} + b_2(C_{A_{op}})\hat{q}_c \quad (24)$$

donde las variables indicadas con  $\hat{\cdot}$  corresponde a las variaciones respecto al punto de operación. Luego, definiendo  $\hat{x}_1 = \hat{C}_A$  y  $\hat{x}_2 = a_{11}\hat{C}_A + a_{12}\hat{T}$  el modelo linealizado (23)-(24) queda expresado como un sistema LPV afín de la forma (3)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} \hat{x} + B_{C_{Af}}\hat{C}_{Af} + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \hat{q}_c \quad (25) \\ \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} \end{aligned}$$

donde  $\theta_1 = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$ ,  $\theta_2 = (a_{11} + a_{22})$  y  $\theta_3 = b_{22}a_{12}$ <sup>5</sup>. El conjunto de valores posibles  $\Theta$  es el producto cartesiano de los respectivos valores extremos correspondiente al intervalo  $[\underline{C}_{A_{op}}, \overline{C}_{A_{op}}]$

$$\Theta = [\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1] \times [\underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2] \times [\underline{\theta}_3, \overline{\theta}_3].$$

A los efectos de evaluar las propiedades del PID LPV gain scheduled (PID-GS), se realiza un análisis comparativo con un PID robusto. Para el

cálculo de las ganancias del PID robusto se considera que ningún parámetro es medido, mientras que para el diseño del PID-GS se adopta como vector de parámetros  $\theta_m = [\theta_1 \ \theta_2]^T$  y se normaliza la acción de control como  $u_n = q_c/b$  para satisfacer la condición  $B_u$  constante.

Ambos controladores se diseñan para cumplir los siguientes objetivos:

- minimizar el efecto de la perturbación en la concentración de entrada  $C_{Af}$  sobre la concentración del producto  $C_A$  en el sentido de performance  $H_\infty$  (i.e. minimizar  $\|T_1\|_\infty < \gamma$ , con  $z_1 = \hat{C}_A$  y  $w_1 = \hat{C}_{Af}$ ),
- minimizar el efecto de las condiciones iniciales sobre los estados y la acción de control (i.e. minimizar  $\|T_2\|_2 < \nu$ , con  $z_2 = I\hat{x} + \rho\hat{q}_c$ ,  $w_2 = \hat{x}(0)$  y  $B_{w_2} = I$ ),
- asegurar que los polos de lazo cerrado del sistema (23) evaluado en valores constante de  $\theta$  se encuentre en la región de plano complejo delimitada por la intersección de un cono centrado en  $s = 0$  de ángulo interno  $3\pi/4$  y el semiplano  $Re(s) < -1$ .

Se consideró distintas zonas de operación:

A. Zona estable ( $C_{A_{op}} \in [0,06, 0,14]$ )

La Fig. 2 presenta la respuesta ante perturbaciones en la concentración  $C_{Af}$  de los sistemas a lazo cerrado correspondientes a ambos controladores en dos puntos de operación. En el rango de operación considerado el reactor presenta un comportamiento estable a lazo abierto. Los controles se obtuvieron minimizando  $\gamma$  y fijando  $\rho$  en 0,2 y  $\nu$  en 350. El valor de  $\gamma$  obtenido en el diseño del PID robusto fue 1,039 y en el PID-GS 0,673. El diseño menos conservador del PID-GS es visible en la Fig. 2. En todos los casos puede observarse que el PID-GS logra un mejor rechazo de la perturbación mientras que la acción de control se mantiene en límites similares al PID robusto.

B. Zona estable e inestable ( $C_{A_{op}} \in [0,06, 0,5]$ )

Las ventajas de PID-GS se hacen más notorias cuando el rango de operación se amplía hasta 0,5. Para valores de  $C_{A_{op}}$  entre 0,15 y 0,5 el comportamiento de la planta a lazo abierto es inestable. A pesar de esto, aún es posible diseñar un PID-GS estabilizante que cumpla con las especificaciones. No sucede lo mismo con el PID robusto, sólo es posible hallar un juegos de ganancias si se relajan considerablemente las especificaciones. En la Fig. 3 puede observarse la respuesta ante perturbaciones en  $C_{Af}$  del sistema a lazo cerrado. En este caso, el PID-GS fue diseñado con los mismos objetivos excepto por una restricción mayor en la acción de control ( $\rho = 0,3$ ). En cambio, el PID robusto debió diseñarse con una restricción menor sobre  $q_c$  ( $\rho = 0,1$ ) y ampliar la región de los polos

<sup>5</sup> Por brevedad, la dependencia respecto de  $C_{A_{op}}$  no ha sido explícitamente indicada

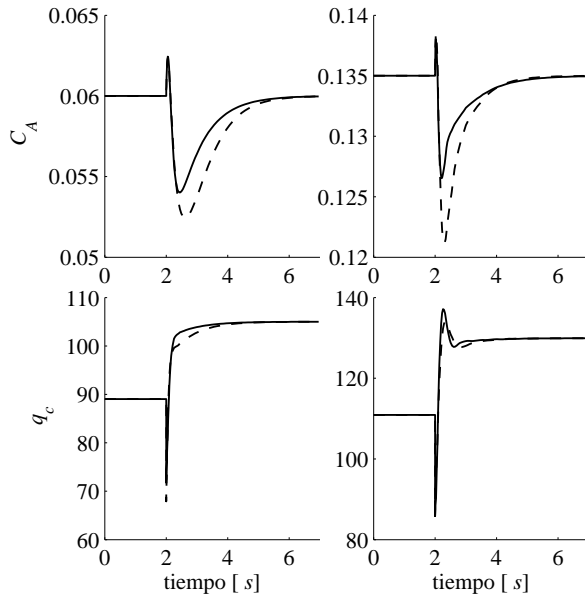


Figura 2. Respuesta del sistema a lazo cerrado ante perturbaciones en  $C_{Af}$  en la zona estable ( $C_{A_{op}} \in [0,06, 0,14]$ ). (—) PID-GS, (- -) PID robusto

de lazo cerrado al semiplano  $Re(s) < -0,25$ . La Fig. 3 muestra una respuesta más lenta y una acción de control mayor en el caso del PID robusto, como era de esperar luego de haber tenido que relajar los objetivos de diseño.

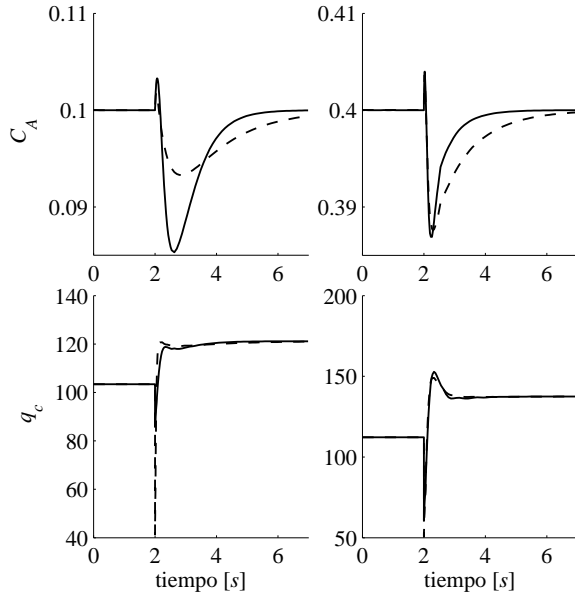


Figura 3. Respuesta del sistema a lazo cerrado ante perturbaciones en  $C_{Af}$  en la zona estable e inestable ( $C_{A_{op}} \in [0,06, 0,5]$ ). (—) PID-GS, (- -) PID robusto

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha propuesto un método de diseño de controladores PID para plantas no lineales

y variantes en el tiempo basado en los sistemas LPV y la optimización convexa con LMIs. El método propuesto abarca tanto el diseño de PID robusto como de PID gain scheduled. En los casos donde la dinámica de la planta presenta cambios importantes, la posibilidad de adaptar las ganancias del PID logra un control menos conservador que reditúa en un mejor desempeño del sistema a lazo cerrado o ampliación la zona operación.

Respecto a los PID gain scheduled clásicos, el método propuesto no solo permite la optimización de las ganancias sobre amplio conjunto de objetivos sino que también simplifica considerablemente la implementación y evita los problemas de estabilidad que surgen en la conmutación de controladores.

## REFERENCIAS

- Apkarian, P. and P. Gahinet (1995). A convex characterization of gain-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  controllers. *IEEE Trans. on Aut. Contr.* **40**, 853–864.
- Apkarian, P., P. Gahinet and G. Becker (1995). Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica* **31**, 1251–1261.
- Astrom, K.J. and T. Hagglum (1995). *PID controllers*. Instrument Society of America. Research Triangle Park, NC.
- Becker, G. and A. Packard (1994). Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Syst. & Contr. Lett.* **23**, 205–215.
- El Ghaoui, L., Nikoukhah R. and F. Delebecque (1995). *LMITOOL: a front-end for LMI optimization, User's guide*.
- Gahinet, P., A. Nemirovski, A. Laub and M. Chilali (1995). *The LMI Control Toolbox*. The Mathworks, Inc.
- Ge, M., M. Chiu and Q. Wang (2002). Robust PID controller design via LMI approach. *J. of Process Control* **12**, 3–13.
- Rugh, W.J. and J. S. Shamma (2000). A survey of research on gain scheduling. *Automatica* **36**(10), 1401–1425.
- Scherer, C. (1995). *Trends in Control, An European Perspective*. Chap. Mixed  $H_2/H_\infty$  Control, pp. 173–216. Springer-Verlag.
- Scherer, C. (1997). Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Trans. on Aut. Cont.* **42**, 896–910.
- Shamma, J. and M. Athans (1991). Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. *Automatica* **27**, 559–564.
- Shamma, J. and M. Athans (1992). Gain scheduling: Potential hazards and possible remedies. *Contr. Syst. Mag.* pp. 101–107.